

1 Formes intégrales des distributions de Dirac

🎯 **Objectif** : déterminer les formes intégrales des distributions de Dirac dans l'espace réciproque et calculer leurs transformées de Fourier inverses.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

🔑 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

- Etablir la forme intégrale de la distribution de Dirac $\delta(k - k')$ dans l'espace réciproque en une dimension.
- Etablir la forme intégrale de la distribution de Dirac $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ dans l'espace réciproque en trois dimensions.
- Déterminer les transformées de Fourier inverses des distributions de Dirac $\delta(k' - k)$ et $\delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$.

2 Transformées de Fourier des produits scalaire et de convolution

🎯 **Objectif** : étudier les transformées de Fourier du produit scalaire et du produit convolution.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

🔑 **Difficulté** : ☆☆☆☆ obligatoire.

Le produit scalaire et le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dans un espace à une dimension spatiale sont définis en notation de Dirac comme,

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx \quad \text{et} \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') g(x') dx'.$$

Le produit scalaire et le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$ dans l'espace à trois dimensions spatiales sont définis comme,

$$\langle f | g \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} f^*(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) d^3r \quad \text{et} \quad (f * g)(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d^3r'.$$

- (a) Montrer que la transformation de Fourier préserve le produit scalaire entre deux fonctions dans les espaces à une et à trois dimensions.
- (b) En déduire que la transformation de Fourier préserve la probabilité p_ϕ d'observer un système quantique, dont l'état est décrit par le vecteur normé $|\psi\rangle \in (H)$, dans un état propre décrit par le vecteur normé $|\phi\rangle \in (H)$ où l'espace de Hilbert $(H) \subset \{L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}^3)\}$.
- (c) Démontrer le théorème de convolution de deux fonctions $f, g \in \{L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}^3)\}$ pour dans des espaces à une et trois dimensions.

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(f * g)(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} \tilde{f}(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k}).$$

3 Transformées de Fourier de fonctions

🎯 **Objectif** : déterminer les transformées de Fourier de fonctions.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

Déterminer les transformées de Fourier $\tilde{f}(k)$ des fonctions $f(x)$ suivantes,

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{si } |x| > x_0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = e^{-a|x|} \quad \text{où } a > 0$$

$$(c) f(x) = \cos(k'x) \quad \text{où } k' > 0$$

$$(d) f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2} \quad \text{où } a > 0$$

$$(e) f(x) = e^{-ax^2} \quad \text{où } a > 0$$

$$(f) f(x) = g(x) e^{ik'x} \quad \text{où } g(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$(g) f(x) = g(x - x') \quad \text{où } g(x - x') \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$(h) f(x) = g(ax) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*.$$

$$(i) f(x) = g^*(x).$$

4 Identité de Parseval

🎯 **Objectif** : appliquer l'identité de Parseval.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆ facultatif.

L'identité de Parseval, démontrée en exercice 2, s'écrit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk,$$

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction,

$$f(x) \begin{cases} 1 - \left| \frac{x}{2} \right| & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

(b) A l'aide de l'identité de Parseval, en déduire l'intégrale suivante,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx \quad (2)$$

5 Facteur de diffusion atomique

🎯 **Objectif** : déterminer les transformées de Fourier de fonctions.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆ facultatif.

En physique des particules, les facteurs de diffusion permettent de caractériser la répartition de charge électrique des particules. Le facteur de diffusion atomique $f(\mathbf{k})$ est la transformée de Fourier de la densité de charge électrique $\rho(\mathbf{r})$,

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

(a) Pour un facteur de diffusion atomique déterminé expérimentalement,

$$f(\mathbf{k}) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{a^2}{k^2 + a^2},$$

où q est une charge électrique, calculer la densité de charge électrique $\rho(\mathbf{r})$ correspondante.

6 Potentiels retardés

🎯 **Objectif** : résoudre une équation d'onde avec un terme de source.

📖 **Théorie** : analyse réelle et complexe.

🔧 **Difficulté** : ★★★★★ facultatif.

En jauge de Lorentz, le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$ et le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sont des champs qui satisfont les équations d'onde suivantes,

$$\begin{aligned}(\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) \phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}, \\(\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),\end{aligned}$$

où $\rho(\mathbf{r}, t)$ est la densité de charge électrique et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ la densité de courant électrique. La résolution de ces deux équations d'onde revient à déterminer un champ de potentiel $f(\mathbf{r}, t)$ en présence d'un champ de densité de source $s(\mathbf{r}, t)$ satisfait l'équation d'onde,

$$(\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) f(\mathbf{r}, t) = -s(\mathbf{r}, t).$$

La fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ de l'équation d'onde dans l'espace direct est la transformée de Fourier inverse par rapport à l'espace et au temps de la fonction de Green $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ dans l'espace réciproque,

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3k d\omega,$$

où le signe moins dans l'argument de l'exponentielle est dû à la structure mathématique de l'espace-temps. La fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ dans l'espace direct représente la réponse du système à une densité de source ponctuelle en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ au temps $t = 0$. Elle satisfait donc l'équation de Green suivante,

$$(\nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2) G(\mathbf{r}, t) = \delta^3(\mathbf{r}) \delta(t).$$

- (a) Montrer que la transformée de la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ dans l'espace réciproque s'écrit,

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{4\pi^2} \frac{1}{\omega^2 - c^2 k^2}.$$

- (b) Montrer que la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ dans l'espace direct peut être écrite comme,

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(ckt)}{ck} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \Theta(t).$$

- (c) Montrer que la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ dans l'espace direct peut être écrite comme combinaison linéaire de distributions de Dirac,

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi r} \left(\delta(ct + r) - \delta(ct - r) \right) \Theta(t).$$

- (d) Montrer la propriété suivante de la distribution de Dirac,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

En déduire que la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ peut être remise en forme comme,

$$G(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right).$$

- (e) Déterminer la fonction de Green purement spatiale $G(\mathbf{r})$ définie comme,

$$G(\mathbf{r}) = \int_0^\infty G(\mathbf{r}, t) dt.$$

- (f) Déterminer le champ de potentiel $f(\mathbf{r}, t)$ et en déduire le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$ ainsi que le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.